

## Aberystwyth University

### *Rhaniad arwynebedd lleiaf silindr yn dair rhan*

Davies, Tudur; Garratt, Lee; Cox, Simon

*Published in:*  
Gwerddon

*Publication date:*  
2015

*Citation for published version (APA):*

Davies, T., Garratt, L., & Cox, S. (2015). Rhaniad arwynebedd lleiaf silindr yn dair rhan. *Gwerddon*, (20), 30-43.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the Aberystwyth Research Portal (the Institutional Repository) are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the Aberystwyth Research Portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the Aberystwyth Research Portal

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

tel: +44 1970 62 2400  
email: [is@aber.ac.uk](mailto:is@aber.ac.uk)

**Dr Tudur Davies, Lee Garratt  
a'r Athro Simon Cox**

---

# **Rhaniad arwynebedd lleiaf silindr yn dair rhan**

---

**Gwerddon**

**CYFNODOLYN ACADEMAIDD CYMRAEG**

Golygydd: **Dr Anwen Jones**

---

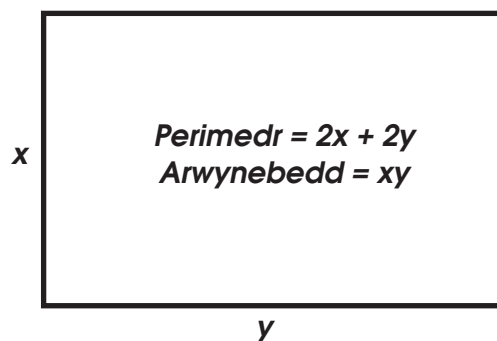
# Rhaniad arwynebedd lleiaf silindr yn dair rhan

**Dr Tudur Davies, Lee Garratt a'r Athro Simon Cox**

## 1. Cyflwyniad

Mae optimeiddio yn dechneg fathemategol bwysig sydd â defnydd eang iddi. Yn syml, mae'n ymwneud â dewis yr elfen neu'r datrysiad gorau o'r set lawn o rai posib. Fel enghraifft, gadewch i ni ystyried y broblem syml o optimeiddio'r arwynebedd sy'n cael ei amgáu gan berimedr penodol. Gellir dychmygu'r broblem fel yr un sy'n wynebu ffermwr wrth iddo geisio optimeiddio arwynebedd,  $A$ , ei gorlan ddefaid o wybod fod ganddo gyfanswm hyd cyfyngedig o giattiau neu ffens er mwyn gwneud hynny. Mae'n debyg mai'r datrysiad amlycaf fyddai creu corlan betryal, ag ymylon hyd  $x$  ac  $y$ , dyweder (gweler Ffigur 1). Gadewch i ni geisio optimeiddio arwynebedd y petryal hwn. Er mwyn symleiddio cyfrifiad y siâp pedrochrog optimaidd, gadewch i ni gymryd, heb golli cyffredinoled, mai hyd y perimedr,  $P$ , yw 4. Felly, mae gennym fod  $2x + 2y = 4$ , hynny yw,  $y = 2 - x$ . Felly'r fformiwla sy'n rhoi arwynebedd y petryal yn nhermau  $x$  yn unig yw

$$A = xy = x(2 - x) \quad (1)$$



**Ffigur 1: Pa gymhareb o  $x$  ac  $y$  sy'n rhoi'r arwynebedd mwyaf ar gyfer petryal gyda pherimedr penodol,  $P$ ?**

$$\frac{dA}{dx} = 2 - 2x = 0$$

Caiff y ffwythiant uchod ei optimeiddio pan mae deilliad yr arwynebedd parthed  $x$  yn hafal i sero:

(2)

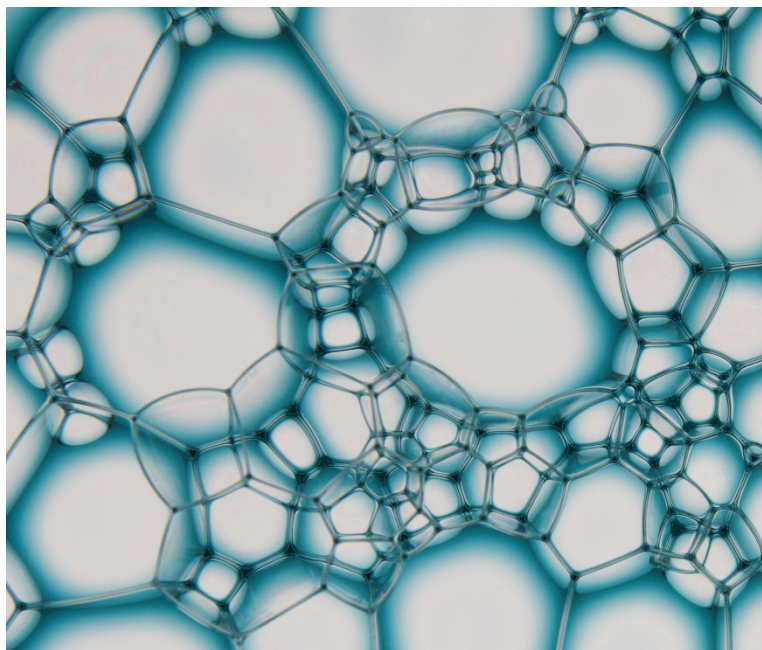
Felly, ceir arwynebedd optimaidd ar gyfer petryal â pherimedr o 4 pan mae  $x = 1$ , ac felly  $y = 1$ . Hynny yw, y sgwâr yw'r siâp pedrochr optimaidd ar gyfer amgáu arwynebedd â pherimedr penodol.

Gellir gwella ar y datrysiad uchod drwy gynyddu nifer yr ymylon,  $n$ , sydd i'r siâp ond gan gadw'r perimedr yn gyson. Mae'n bosib profi'n fathemategol mai'r polygon rheolaidd yw'r datrysiad optimaidd ar gyfer pob  $n$ , h.y. pentagon ar gyfer pum ymyl, hecsagon ar gyfer chwe ymyl ac yn y blaen. Terfan y polygonau rheolaidd wrth i  $n$

gynyddu i anfeidredd yw'r cylch, ac felly mae'n dilyn mai dyma'r siâp optimaidd i amgáu arwynebedd â pherimedr penodol. Mae'r canlyniad hwn yn ehangu yn naturiol i dri dimensiwn: y sffêr sy'n amgáu'r cyfaint optimaidd ag arwynebedd arwyneb penodol. Caiff hyn ei gadarnhau gan ffurf swigen nwy, sydd, o ganlyniad i ddyhead ffilm sebon i leiafysymio'i egni (neu ei arwynebedd), yn cymryd siâp sffêr perffaith pan fydd mewn cydbwysedd.

Yma, rydym yn ystyried rhaniad optimaidd gwrthrych tri dimensiwn yn ddarnau o'r un maint. Hynny yw, beth yw rhaniad arwynebedd lleiaf gwrthrych â siâp penodol. Er mai ysgogiad mathemategol sydd gennym i ddatrys y broblem hon, gellir ystyried defnydd ymarferol iddi yn ogystal. Er enghraifft, tybiwch fod angen torri deunydd gwerthfawr, megis aur, yn ddarnau o'r un maint a bod torri'r deunydd â llafn yn difrodi'r arwyneb hwnnw. Felly, mae darganfod y toriad arwynebedd lleiaf yn angenrheidiol er mwyn lleiafysymio'r difrod a achosir.

Soniwyd eisoes fod swigen nwy yn datrys y broblem o amgáu cyfaint yn y ffordd fwyaf effeithlon bosib. Gadewch i ni ystyried y posibilrwydd y bydd casgliad o swigod, neu ewyn hylifol (gweler Ffigur 2), yn datrys y broblem o rannu gofod yn fwy nag un rhan yn y ffordd optimaidd. Mae ewynnau hylifol yn cael eu hastudio gan wyddonwyr oherwydd eu strwythur clir-ddifffiniedig, eu priodweddau cymhleth a'r defnydd eang a wneir ohonynt yn ddyddiol. Er enghraifft, maent i'w gweld yn ddomestig mewn llawer o gynhyrchion hylendid personol, bwydydd a diodydd, ac yn ddiwydiannol maent yn hanfodol er mwyn gwella effeithlonrwydd prosesau megis gwahanu mwynau drwy arnofiant ac echdynnu olew o greigiau mandyllog (gweler Weaire a Hutzler, 2000; Cantat et al., 2013). Maent hefyd yn ddefnyddiol i ddatrys problemau mathemategol fel yr un dan sylw yma.



***Ffigur 2: Delwedd o ewyn hylifol. Yma, gwelir clwstwr o swigod nwy sy'n amrywio o ran maint, wedi'u gwahanu gan ffilmiau sebon tenau. Mae'r ffilmiau sebon yn cwrdd bob yn dri mewn ymylon, sy'n cynnwys y rhan fwyaf o hylif yr ewyn. Mae'r ymylon yma'n cwrdd fesul pedwar mewn fertigau.***

Mae'r ddelwedd yn Ffigur 2 yn arddangos ewyn hylifol fel casgliad o swigod sydd wedi'u gwahanu gan ffilmiau tenau sy'n cwrdd â'i gilydd mewn ymylon, sy'n cynnwys y rhan fwyaf o'r hylif. Yn y gwaith hwn, byddwn yn ystyried ewynnau sych iawn yn unig, lle mae cynnwys yr hylif yn yr ymylon yn ddim, bron. Yn yr achos hwn, mae siapiau'r swigod yn dynesu tuag at bolyhedrau, a gellid amcangyfrif yr ymylon fel llinellau yn unig. Rydym hefyd yn ystyried ewyn sydd mewn cydbwysedd yn unig, h.y. yn ei gyflwr egniol isaf. O ganlyniad i leiafsgymiad ei egni, mae ei strwythur yn bodloni rheolau mathemategol penodol. Yn gyntaf, mae'r ewyn yn bodloni deddfau Plateau (Plateau, 1873; Taylor, 1976), sy'n nodi bod ei arwynebau'n cwrdd fesul tri mewn llinell ar ongl o  $120^\circ$  i'w gilydd, a bod yr ymylon hyn yn cwrdd mewn fertig fesul pedwar ar ongl gyfartal oddeutu  $109^\circ$  i'w gilydd. Yn ail, mae deddf Laplace (neu ddeddf Laplace-Young) yn perthnasu'r gwahaniaeth mewn gwasgedd ar draws arwyneb sy'n perthyn i ddwy swigen gyfagos i grymdd yr arwyneb hwnnw. Ar gyfer ewyn mewn cydbwysedd, mae gan ei arwynebau grymdd cymedrig cyson. Felly, mae ewyn yn offeryn delfrydol ar gyfer datrys y broblem dan sylw.

Mae'r broblem o rannu gofod yn rhaniadau o'r un cyfaint gan ddefnyddio'r arwynebedd lleiaf posib wedi bod o ddiddordeb i fathemategwyr ers dros ganrif bellach. Cynigiodd yr Arglwydd Kelvin ddatrysiad 'nôl yn 1887 (Thomson, 1887), a daeth y broblem i gael ei hadnabod fel problem Kelvin byth ers hynny (Weaire, 1994). Roedd ei ddatrysiad yn cynnwys celloedd oedd i gyd o'r un siâp, sef y tetracaidecahedron, sydd â chwe wyneb pedrochrog ac wyth wyneb hecsagonol. Dyma'r datrysiad arwynebedd lleiaf a ddarganfuwyd am dros ganrif, nes i Weaire a Phelan ddarganfod un ag arwynebedd llai yn 1993 (Weaire a Phelan, 1993). Roedd eu rhaniad hwy o'r gofod yn cynnwys cell uned ag wyth swigen o ddau dopoleg wahanol: un yn ddodecahedron afreolaidd ag wynebau pentagonol a'r llall yn detracaidecahedron â dau wyneb hecsagonol a deuddeg wyneb pentagonol. Daeth y strwythur hwn, ewyn Weaire-Phelan fel y'i gelwir, i amlygrwydd ehangach yn 2008 wedi iddo gael ei ddefnyddio yn nyluniad arena nofio drawiadol Gemau Olympaidd Tsieina. Hyd heddiw, nid oes neb wedi llwyddo i lunio prawf mathemategol ar gyfer datrysiad optimaidd problem Kelvin.

Gan fod darganfod y datrysiad optimaidd ar gyfer y broblem, a'i brofi'n fathemategol, yn gymhleth iawn, mae'n synhwyrol ceisio symleiddio'r broblem i ddechrau. Er mwyn gwneud hyn, mae llawer yn y gorffennol wedi lleihau'r broblem i ddau ddimensiwn. Eto, gellid defnyddio ewyn i ddatrys y broblem honno, gan ei gyfyngu i un haenen o swigod rhwng dau blât gwydr. Yma, o edrych yn berpendicwlar ar y ddau blât a'r haenen swigod, mae arwynebau'r ewyn yn lleihau yn rhwydwaith o ymylon, a'r ymylon mewn tri dimensiwn yn lleihau yn fertigau mewn dau ddimensiwn a chyfeintiau'r swigod yn lleihau yn arwynebeddau. Mae'r deddfau mathemategol sy'n cael eu bodloni gan strwythur yr ewyn hefyd yn lleihau'n naturiol i ddau ddimensiwn; yn yr achos hwn arcau cylchol sy'n cwrdd fesul tri mewn fertig ar ongl o  $120^\circ$  i'w gilydd yw'r ymylon. Y nod yw defnyddio ewyn â swigod o'r un maint er mwyn darganfod y trefniant sydd â'r perimedr lleiaf. Profwyd mai'r crwybr hecsagonol yw'r trefniant optimaidd ar gyfer swigod sy'n llenwi'r plân (Alfaro et al., 1993). Yn fanwl gywir, nid oes prawf dadansoddol ar gyfer hyn, ond drwy ddefnyddio efelychiadau rhifiadol, dangoswyd mai dyma'r datrysiad optimaidd mwyaf tebygol.

Er mwyn symleiddio'r broblem ymhellach, mae nifer wedi ceisio darganfod y datrysiad optimaidd ar gyfer nifer fach o raniadau. Mae profion mathemategol wedi'u llunio ar gyfer

tair swigen neu lai, gweler (Alfaro et al., 1990; Morgan, 1994; Morgan, 2000; Wichiramala, 2004; Canete a Ritore, 2004). Er enghraifft, profwyd mai'r datrysiad mwyaf effeithlon o amgáu dau raniad hafal o ofod yw'r datrysiad 'dwy swigen safonol'. Ar gyfer mwy o swigod, does dim prawf mathemategol hyd yma, ond mae nifer o ddyfaliadau wedi'u cynnig, gan ddefnyddio dulliau rhifiadol i'w cefnogi (Cox et al., 2003; Cox a Graner, 2003; Cox, 2006; Heppes a Morgan, 2005). Er enghraifft, defnyddiodd Cox et al. (2003) efelychiadau rhifiadol oedd yn rhoi shifflad i glwstwr o swigod. Golyga hyn eu bod yn neidio o un trefniant i un arall o ganlyniad i newidiadau topolegol, a mesurwyd cyfanswm hyd y strwythur ar gyfer pob trefniant.

Yn y gwaith uchod, mae perimetr y gofod sy'n cael ei rannu gan y swigod yn rhydd i gymryd unrhyw ffurf. Gellir symleiddio'r broblem ymhellach trwy roi cyfyngiad ar siâp y perimetr hwn. Mae dyfaliadau ar gyfer rhaniadau gorau'r cylch wedi'u cynnig gan lawer, gweler er enghraifft (Canete a Ritore, 2004; Cox, 2006; Tomonaga, 1974; Bleicher, 1987; Cox a Flikkema, 2010). Yn ychwanegol at hyn, mae dyfaliadau wedi'u cynnig ar gyfer rhaniadau gorau'r sgwâr a'r triongl hafalochrog (ar gyfer chwech neu lai o swigod yn unig) (Tomonaga, 1974; Bleicher, 1987; Cox a Flikkema, 2010). Mewn tri dimensiwn, mae gwaith eisoes wedi'i wneud i ddarganfod rhaniadau mwyaf effeithlon y sffêr a'r ciwboïd (Almgren a Taylor, 1976; Hales, 2002; Engelstein, 2010; Goldberg, 1934). Bu i Ros (2005) ddarganfod datrysiadau'r arwynebedd lleiaf ar gyfer rhannu'r sffêr, y ciwb a'r silindr yn ddwy ran â'r un cyfaint. Ar gyfer y silindr, enrhifodd ddau ddatrysiad posib, yn ddibynol ar faint y gymhareb rhwng radiws ac uchder y silindr. Ar gyfer silindr â radiws bach o'i gymharu â'i uchder, cafwyd rhaniad optimaidd drwy leoli cylch llorweddol hanner ffordd i fyny'r silindr. Ar gyfer silindr byr o ran uchder ond â radiws mawr, mae'r rhaniad optimaidd yn cael ei gyflawni gan ffilm betryal fertigol sy'n rhyngdorri diamedr y silindr. Yma, byddwn yn ychwanegu at y gwaith hwn drwy ystyried y broblem gyfatebol ar gyfer rhannu'r silindr yn dair rhan gyfartal.

## 2. Dull

Er mwyn darganfod datrysiadau'r arwynebedd lleiaf ar gyfer rhannu'r silindr yn dair rhan, rydym yn dechrau drwy enrhifo a dadansoddi'r holl ddatrysiadau sy'n bosib. Er enghraifft, gellir ystyried datrysiadau lle nad yw'r arwynebau'n rhyngdorri o gwbl, yna rhai lle mae arwynebau'n cwrdd mewn llinell bob yn dri. Er mwyn gwirio a chymharu'r datrysiadau hyn, rydym yn defnyddio'r pecyn meddalwedd Surface Evolver (Brakke, 1992), a ddefnyddir yn eang i efelychu ewynnau ac esblygu arwynebau yn rhai minimol. Yn syml, mae'r meddalwedd yn lleiafysmio egni casgliad o arwynebau yn rhifiadol, yn ôl cyfyngiadau penodol, ac felly'n ddelfrydol ar gyfer ceisio datrys y broblem dan sylw.

Ar gyfer pob datrysiad posib, rydym yn adeiladu strwythur cychwynnol syml sydd â thopoleg sy'n cyfateb iddo. Rydym yn bwydo'r wybodaeth i'r Surface Evolver ar ffurf ffeil destun sy'n cynnwys rhestr o fertigau, ymylon, arwynebau a chellgyrff (y swigod). Yn fanylach, mae rhestr y fertigau'n cynnwys label a roddir i bob un ohonynt yn ogystal â gwerthoedd y cyfesurynnau Cartesaidd ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) sydd ganddynt. Rhestrir yr ymylon drwy roi label iddynt a nodi pa ddwy fertig maent yn eu cysylltu, yn ôl eu trefn. Yna rydym yn enrhifo'r arwynebau, â phob un yn cynnwys cyfres o ymylon wedi'u trefnu i greu dolen gaeedig. Yn olaf, rydym yn enrhifo'r celloedd, neu'r swigod, sy'n cynnwys gwybodaeth am ba arwynebau sy'n amgáu eu cyfaint. Yna, rydym yn gosod cyfyngiadau ar y

strwythur. Diffinnir siâp y silindr â dwy sail lorweddol,  $z = 0$  a  $z = u$ , lle mae  $u$  yn dynodi uchder y silindr, yn ogystal â wal grom,  $x^2 + y^2 = r_s^2$ , lle mae  $r_s$  yn dynodi radiws y silindr. Cyfaint y silindr yw arwynebedd y cylch sy'n sail iddo,  $2\pi r_s^2$ , wedi'i luosi â'i uchder,  $u$ . Cyfyngir cyfeintiau'r swigod i draean cyfaint y silindr, sef  $2\pi r_s^2 u/3$ . Mae arwynebau sy'n cwrdd â waliau'r silindr yn cael eu gorfodi i aros mewn cyswllt â'r waliau hyn, ond maent yn rhydd i lithro ar eu hyd. Yn olaf, mae arwyneb yr ewyn yn cael ei driongli'n fân er mwyn sicrhau cywirdeb da i'r datrysiadau.

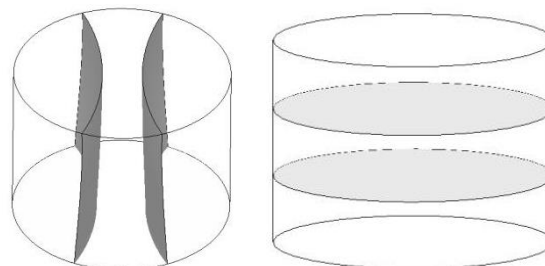
Mae arwynebedd y strwythur yn cael ei leiafysmio drwy ddefnyddio dull disgyniad graddiant, lle mae'r arwynebau'n cael eu hesblygu'n araf nes cyrraedd minimwm lleol. Ar ôl cyrraedd y minimwm hwn, rydym yn cofnodi arwynebedd y datrysiad, sef cyfanswm arwynebedd trionglau'r arwynebau. Rydym yn ailadrodd y broses hon gan amrywio uchder,  $u$ , y silindr ychydig bob tro gan gadw'r radiws yn gyson,  $r_s = 1$ . Felly, mae pob datrysiad terfynol yn cynnig minima lleol ar gyfer yr arwynebedd yn unig. Byddwn yn ailadrodd y broses hon ar gyfer pob datrysiad dichonadwy ac yna'n cymharu'r holl finima lleol â'i gilydd er mwyn darganfod y minima absoliwt.

### 3. Rhannu'r silindr yn dair rhan

Mae llawer o ddatrysiadau posib ar gyfer y broblem o rannu siâp tri dimensiwn fel silindr yn dair rhan gyfartal. Fel y soniwyd yn Rhan 1, mae'n rhaid i siâp a thopoleg arwynebau'r datrysiadau arwynebedd lleiaf fodloni deddfau Plateau a Laplace-Young. Mae gan yr arwynebau grymedd cymedrig cyson ac maent yn cwrdd â waliau'r silindr ar ongl sgwâr. Yn y rhan hon, byddwn yn dadansoddi'r datrysiadau arwynebedd lleiaf ar gyfer rhannu'r silindr yn dair rhan, yn gyntaf drwy ddefnyddio dau arwyneb sydd ddim yn croestorri, ac yna dri arwyneb sy'n cwrdd â'i gilydd mewn llinell.

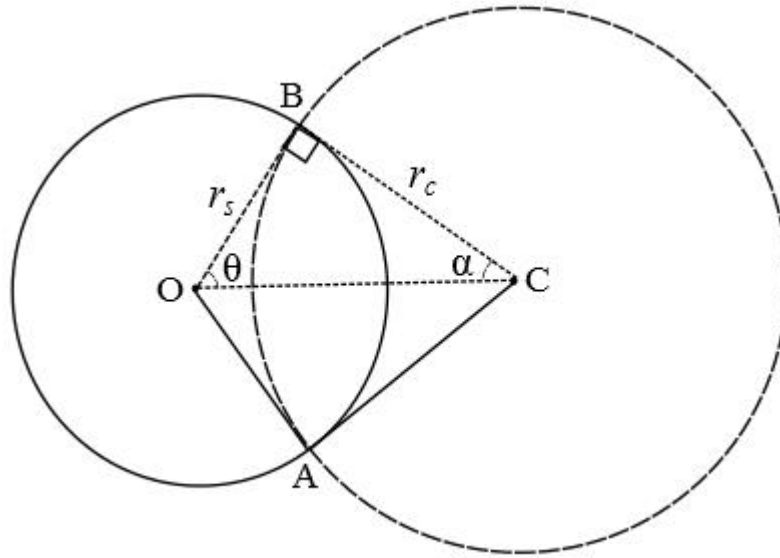
#### 3.1 Rhannu'r silindr â dau arwyneb sydd ddim yn croestorri

Efallai mai'r ffordd symlaf o rannu silindr yn dair rhan â chyfeintiau cyfartal yw drwy ddefnyddio dau arwyneb sydd ddim yn croestorri ei gilydd. Mae llawer o'r datrysiadau lle bodlonir yr amod hon yn rhai sy'n amlwg ag arwynebeddau mawr, er enghraifft, rhai sy'n cynnwys ffurf tiwbiau neu doroidiau. Caiff y rhain eu diystyru'n syth gan y byddai'n bosib i'r arwynebau leihau eu harwynebedd drwy gyffwrdd ag un o waliau'r silindr. Gellir diddwytho gweddill y datrysiadau posib drwy rannu'r silindr yn ddwy ran i ddechrau, un ran â chyfaint  $2\pi r_s^2 u/3$  a'r llall â chyfaint  $\pi r_s^2 u/3$ . Er mwyn darganfod datrysiadau ar gyfer rhannu'r silindr yn dair rhan, rydym yn ystyried y cyfuniadau posib ar gyfer parau o'r datrysiadau yma. Trwy gyfuno dau ddatrysiad, rydym yn rhannu'r rhaniad mwyaf yn y datrysiad cyntaf gan ddefnyddio'r arwyneb yn yr ail ddatrysiad. Trwy wneud hyn, a defnyddio'r Surface Evolver i wirio pob cyfuniad, gellir diddwytho mai'r unig ddau ddatrysiad dichonadwy yw'r rhai a ddangosir yn Ffigur 3:



**Ffigur 3: Datrysiadau arwynebedd lleiaf posib ar gyfer rhannu silindr yn dair rhan gan ddefnyddio dau arwyneb sydd ddim yn croestorri**





**Ffigur 4: Darganfod arwynebedd yr arwynebau i'r rhaniad a ddangosir yn Ffigur 3(a) drwy leihau'r broblem i ddau ddimensiwn. Yma dangosir sail y silindr, â radiws a chanol O, yn ogystal â chylch dychmygol, â chanol C a radiws , sy'n dynodi siâp arc cylch a wna un arwyneb sy'n croestori'r silindr yn Ffigur 3(a).**

Dilyna'r datrysiadau hyn yn naturiol o'r datrysiadau arwynebedd lleiaf a ddarganfuwyd gan Ros (2005) ar gyfer rhannu'r silindr yn ddwy ran gyfartal. Gellid darganfod arwynebedd y datrysiadau hyn yn ddadansoddol. Er mwyn cyfrifo arwynebedd y rhaniad a ddangosir yn Ffigur 3(a), mae'n synhwyrol lleihau'r broblem i ddau ddimensiwn i ddechrau, gan fod siâp yr arwynebau'n unfurf yn y cyfeiriad fertigol. Mae Ffigur 4 yn dangos sail y silindr, sydd â chanol O a radiws  $r_s$ , yn ogystal â sail un o'r arwynebau sy'n ei rannu, sy'n arc cylch â chanol C a radiws  $r_c$ . Mae'r onglau  $\theta$  ac  $\alpha$  yn Ffigur 4 yn dynodi'r onglau rhwng yr echelin lorweddol a'r pwyntiau lle mae'r ddau gylch yn rhyngdori, parthed y pwyntiau O a C yn ôl eu trefn. Gwyddom fod arwynebedd y gorgyffwrddiad rhwng sectorau'r ddau gylch yn y diagram yn hafal i draean arwynebedd sail y silindr, sef  $2\pi r_s^2 u/3$ . Mae rhannu'r croestoriad hwn yn ddau segment, drwy dynnu llinell syth o A i B, a defnyddio'r fformiwla ar gyfer arwynebedd segment cylch, yn rhoi'r hafaliad canlynol:

$$\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)r_s^2 + \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)r_c^2 = \frac{\pi}{3}r_s^2 \quad (3)$$

Trwy ystyried y triongl OBC yn Ffigur 4, gwyddom fod swm ei onglau (mewn radiannau) yn hafal i  $\pi$ , ac felly mae  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Gan ddal i ystyried y triongl OBC, gallwn ddefnyddio trigonometreg elfennol, gan nodi fod tangiad yr ongl  $\theta$  yn hafal i'r gymhareb rhwng hyd yr ochr gyferbyn ( $r_c$ ) a hyd yr ochr gyfagos ( $r_s$ ), hynny yw  $r_c = r_s \tan \theta$ . Mae hyn yn rhoi hafaliad (3) yn nhermau  $\theta$  ac  $r_s$  yn unig:

$$\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)r_s^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)r_s^2 \tan^2 \theta = \frac{\pi}{3}r_s^2 \quad (4)$$

Gellir datrys yr hafaliad uchod yn rhifiadol, er enghraifft drwy ddefnyddio'r dull dwyrannu neu ddull Newton. Trwy wneud hyn, cawn mai gwerth  $\theta$  yw 1.17383 radian, yn gywir i



bum lle degol. Felly, gwerth radiws yr arwyneb sy'n rhyngdorri'r silindr, yn nhermau radiws y silindr, yw  $r_c = r_s \tan(1.17383) = 2.38538 r_s$ . Felly, rydym yn diddwytho mai hyd sail,  $h$ , un o'r arwynebau sy'n cydrannu'r silindr yw

$$h = 2ar_c = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1.17383\right) 2.38538r_s = 1.89383r_s. \quad (5)$$

Felly, arwynebedd yr arwynebau sy'n cydrannu'r silindr yn Ffigur 3(a) yw

$$\text{Arwynebedd} = 2hu = 3.78766r_s u. \quad (6)$$

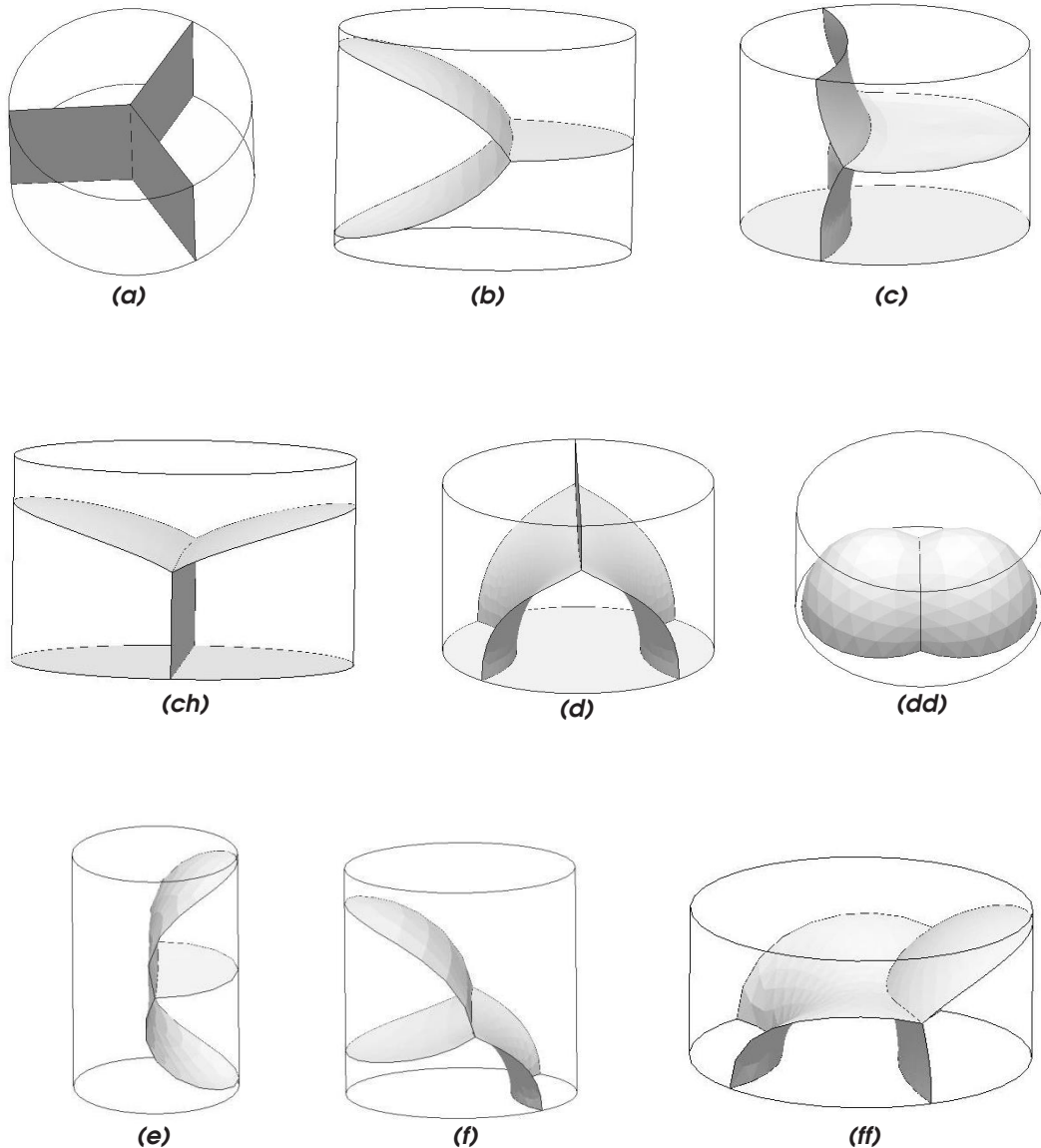
Ar gyfer rhannu'r silindr â dwy ddisg gron, fel yn Ffigur 3(b), arwynebedd y rhaniad yw  $2\pi r_s^2$ . Felly, mae'r ddau ddatrysiad yn Ffigur 3 â'r un arwynebedd pan mae  $3.78766r_s u = 2\pi r_s^2$ , hynny yw, pan mae  $u/r_s = \pi/1.89383$ . Felly, os yw cymhareb agwedd y silindr,  $u/r_s$ , yn fwy na  $\pi/1.89383$ , y datrysiad optimaidd ar gyfer arwynebau sydd ddim yn croestorri yw'r un a ddangosir yn Ffigur 3(a). Os yw'r gymhareb yn llai na  $\pi/1.89383$ , yna'r datrysiad optimaidd yw'r un a ddangosir yn Ffigur 3(b).

### 3.2 Rhannu'r silindr yn dair rhan gan ddefnyddio arwynebau sy'n croestorri

Rydym nawr yn ystyried datrysiadau'r arwynebedd lleiaf ar gyfer rhannu'r silindr yn dair rhan, gan ganiatáu i'r arwynebau gyffwrdd mewn llinell. Fel yn y rhan flaenorol, bydd yr arwynebau'n bodloni rheolau mathemategol Plateau a Laplace-Young. Mae eto'n bosib i'r arwynebau fodloni'r rheolau hyn a chael ffurf debyg i diwbiau neu doroidiau. Felly, fel yn Rhan 3.1, bydd datrysiadau o'r fath yn cael eu diystyru gan y byddai'r arwynebau'n lleihau eu harwynebedd drwy gyffwrdd â waliau'r silindr neu ag arwyneb arall. Gall unrhyw ddatrysiadau lle nad yw'r arwynebau'n cyffwrdd â waliau'r silindr hefyd gael eu diystyru am yr un rheswm. Mae gennym felly'r amod fod yn rhaid i bob arwyneb gyffwrdd â wal y silindr er mwyn i'r datrysiad gael ei ystyried fel un optimaidd. Darganfuwyd naw datrysiad posib lle bodlonir yr amod hwn yn ogystal â deddfau Plateau a Laplace-Young. Defnyddiwyd y Surface Evolver i leiafysmio arwynebedd y datrysiadau hyn, a gwelir delweddau a disgrifiad geiriol ohonynt yn Ffigur 5. Yn y rhan fwyaf o achosion, mae'n anodd cyfrifo arwynebedd yr arwynebau yn ddadansoddol. O'r naw datrysiad, dim ond arwynebedd y datrysiad a ddangosir yn Ffigur 5(a) sy'n hawdd i'w gyfrifo: mae ganddo arwynebedd sy'n hafal i  $3r_s u$ . Ar gyfer gweddill y datrysiadau, rydym yn defnyddio'r Surface Evolver er mwyn cyfrifo'u harwynebedd yn rhifiadol. Gallwn wneud hyn ar gyfer yr holl werthoedd dichonadwy ar gyfer cymhareb agwedd y silindr.

Trwy leiafysmio arwynebedd y datrysiadau a ddangosir yn Ffigurau 5(dd) i 5(ff) yn y Surface Evolver, dangoswyd eu bod yn rhai annichonadwy ar gyfer pob gwerth o'r uchder  $u$ . Ym mhob un o'r achosion yma, roedd yr arwynebau'n ansefydlogi a'u trefniant yn newid i ffurf datrysiad arall. Ar y llaw arall, mae'r datrysiadau a ddangosir yn Ffigurau 5(a) i 5(d) yn rhai dichonadwy ar gyfer rhai gwerthoedd o'r gymhareb agwedd. Rhoddir arwynebedd y datrysiadau dichonadwy, gydag amrywiaeth uchder y silindr,  $u$ , ( $0.5 \leq u \leq 4$ ) ar gyfer radiws,  $r_s = 1$ , yn Nhabl 1.

Gadewch i ni ddadansoddi'r data ar gyfer holl werthoedd cymhareb agwedd y silindr. Y peth cyntaf i'w nodi yw fod arwynebedd y datrysiad a roddir yn Ffigur 5(d) bob amser yn fwy nag arwynebedd datrysiad 5(a). Felly, rydym yn diddwytho na all datrysiad 5(d) byth fod yn rhaniad arwynebedd lleiaf o'r silindr. Hynny yw, minima lleol yn unig a roddir gan y

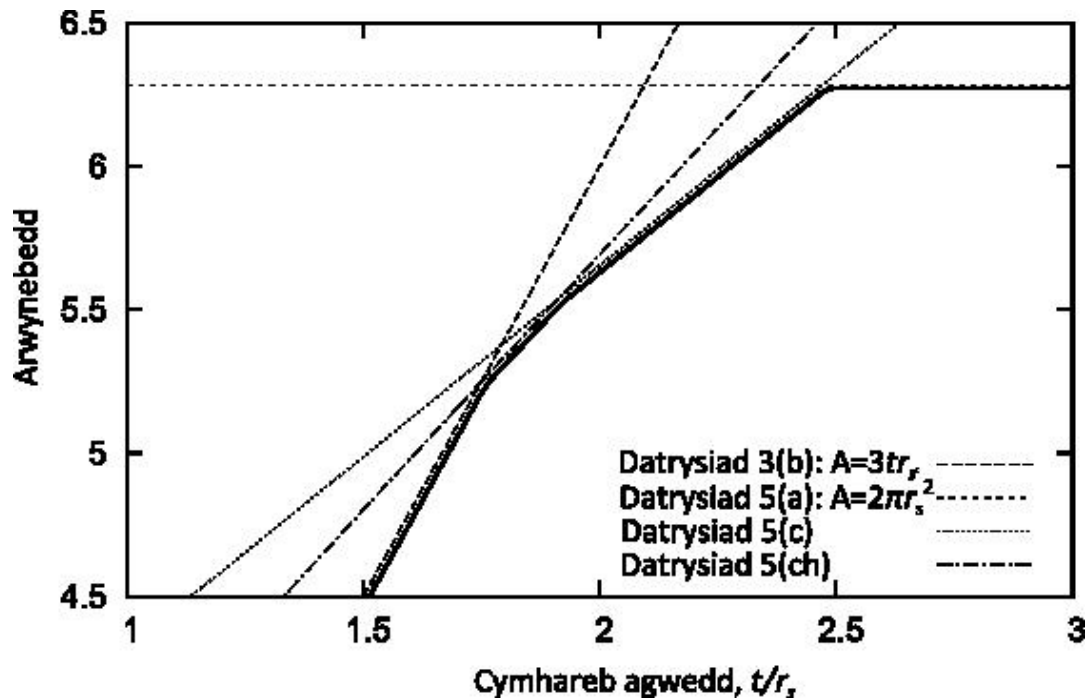


**Ffigur 5: Rhaniad y silindr yn dair rhan gan ddefnyddio arwynebau sy'n cwrdd â'i gilydd yn ôl deddfau Plateau a Laplace-Young: (a) Tri phlân yn cwrdd mewn llinell fertigol sy'n normal i ganol sail y silindr. (b) Plân fflat hanner ffordd i fyny'r silindr yn cwrdd â dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd waliau cyferbyn y silindr. (c) Dau arwyneb crwm, y naill a'r llall yn cyffwrdd seiliau gwahanol i'r silindr, ac yn cwrdd ag un plân llorweddol yn y canol. (ch) Plân fertigol sy'n cyffwrdd sail y silindr ac yn cwrdd â dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd ochrau cyferbyn o'r silindr. (d) Plân fertigol yn deillio o ddiamedr sail y silindr ac yn cyffwrdd â dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd y sail gyferbyn. (dd) Plân hanner cylch fertigol yn cwrdd â dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd â'r un sail. (e) Plân llorweddol yn hanner uchder'r silindr yn cwrdd â dau arwyneb sy'n cyffwrdd wal y silindr ar yr un ochr. (f) Dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd yr un ochr i'r silindr ac yn cwrdd ag arwyneb sy'n cyffwrdd sail y silindr. (ff) Arwyneb crwm sy'n cyffwrdd wal y silindr a hefyd yn cyffwrdd dau arwyneb crwm arall sy'n cyffwrdd sail y silindr.**

Uchder, $u$	Ffigur 3(a)	Ffigur 3(b)	Ffigur 5(a)	Ffigur 5(b)	Ffigur 5(c)	Ffigur 5(ch)	Ffigur 5(d)
0.5	1.893830	6.283185	<b>1.500000</b>		3.014361	3.666417	
0.6	2.272596	6.283185	<b>1.800000</b>		3.195200	3.799971	
0.7	2.651362	6.283185	<b>2.100000</b>		3.376232	3.933593	
0.8	3.030128	6.283185	<b>2.400000</b>		3.557178	4.067354	3.419095
0.9	3.408894	6.283185	<b>2.700000</b>		3.738154	4.201096	3.700903
1	3.787660	6.283185	<b>3.000000</b>		3.919057	4.334806	3.971647
1.1	4.166426	6.283185	<b>3.300000</b>		4.099438	4.468229	4.231254
1.2	4.545192	6.283185	<b>3.600000</b>	5.603333	4.279548	4.601567	4.483841
1.3	4.923958	6.283185	<b>3.900000</b>	5.709740	4.459236	4.734937	4.724978
1.4	5.302724	6.283185	<b>4.200000</b>	5.810351	4.638812	4.868398	4.951667
1.5	5.681490	6.283185	<b>4.500000</b>	5.905501	4.818173	5.001911	5.170003
1.6	6.060256	6.283185	<b>4.800000</b>	5.995413	4.997005	5.135448	5.378503
1.7	6.439022	6.283185	<b>5.100000</b>	6.080434	5.175481	5.268994	5.569775
1.8	6.817788	6.283185	5.400000	6.160674	<b>5.353424</b>	5.402540	
1.9	7.196554	6.283185	5.700000	6.236192	<b>5.531002</b>	5.536087	
2	7.575320	6.283185	6.000000	6.306973	5.708196	<b>5.669635</b>	
2.1	7.954086	6.283185	6.300000	6.372841	5.884853	<b>5.803182</b>	
2.2	8.332852	6.283185	6.600000	6.433624	6.060788	<b>5.936730</b>	
2.3	8.711618	6.283185	6.900000	6.489277	6.236044	<b>6.070277</b>	
2.4	9.090384	6.283185	7.200000	6.539608	6.410472	<b>6.203824</b>	
2.5	9.469150	<b>6.283185</b>	7.500000	6.585124	6.583964	6.337372	
2.6	9.847916	<b>6.283185</b>	7.800000	6.621518	6.756342	6.470919	
2.7	10.22668	<b>6.283185</b>	8.100000	6.647605	6.927350	6.604467	
2.8	10.60545	<b>6.283185</b>	8.400000		7.096405	6.738015	
2.9	10.98421	<b>6.283185</b>	8.700000		7.263400	6.871562	
3	11.36298	<b>6.283185</b>	9.000000		7.427599	7.005109	
3.1	11.74175	<b>6.283185</b>	9.300000		7.587997	7.138657	
3.2	12.12051	<b>6.283185</b>	9.600000		7.742584	7.272204	
3.3	12.49928	<b>6.283185</b>	9.900000		7.887572	7.405752	
3.4	12.87804	<b>6.283185</b>	10.20000		8.011509	7.539299	
3.5	13.25681	<b>6.283185</b>	10.50000			7.672846	
3.6	13.63558	<b>6.283185</b>	10.80000			7.806394	
3.7	14.01434	<b>6.283185</b>	11.10000			7.939941	
3.8	14.39311	<b>6.283185</b>	11.40000			8.073489	
3.9	14.77187	<b>6.283185</b>	11.70000			8.207036	
4	15.15064	<b>6.283185</b>	12.00000			8.340583	

**Tabl 1: Arwynebedd y rhaniadau posib ar gyfer silindr â radiws,  $r_s = 1$ , ac uchder,  $u$ .  
Rhoddir y datrysiad optimaidd ym mhob achos mewn teip trwm.**

datrysiad hwn. Ar gyfer gwerthoedd o gymhareb agwedd y silindr lle mae datrysiad 5(b) yn ddichonadwy, mae cyfanswm ei arwynebedd bob amser yn fwy nag arwynebedd datrysiad 5(ch). Felly, ni all datrysiad 5(b) chwaith fod yn ddatrysiad optimaidd ar gyfer rhannu'r silindr yn dair rhan. Gallwn ddi-ddwytho o'n canlyniadau ar gyfer rhaniadau o'r silindr yn dair rhan sy'n cynnwys arwynebau'n rhyngdorri mai datrysiad 5(a) yw'r un optimaidd ar gyfer gwerthoedd o'r gymhareb agwedd yn y cyfwng  $0.5 < u/r_s < 1.7$ . Datrysiad 5(c) sydd â'r arwynebedd lleiaf pan mae'r gymhareb agwedd yn y cyfwng  $1.8 < u/r_s < 1.9$  a datrysiad 5(ch) yw'r un optimaidd pan mae'r gymhareb agwedd yn y cyfwng  $2 < u/r_s < 4$ .



**Ffigur 6:** Arwynebedd y rhaniadau ar gyfer datrysiadau dichonadwy i'r broblem o rannu silindr yn dair rhan â chyfeintiau cyfartal. Amrywir y gymhareb agwedd (uchder,  $u$  / radiws,  $r_s$ ) a chyfrifir cyfanswm arwynebedd yr arwynebau,  $A$ , yn rhifiadol gan Surface Evolver.

### 3.3 Cymharu'r holl ddatrysiadau

Trwy gymharu'r holl ddatrysiadau, gallwn ddarganfod y datrysiad sydd â'r arwynebedd lleiaf, y minima absoliwt, ar gyfer holl werthoedd cymhareb agwedd y silindr. Mae'n amlwg fod gan ddatrysiad 5(a) arwynebedd llai na'r datrysiad a welir yn Ffigur 3(a) ar gyfer holl werthoedd y gymhareb gan fod  $3r_s u < 3.78766r_s u$ . Mae'r datrysiad 'dwy ddisg' a welir yn Ffigur 3(b) yn ddatrysiad optimaidd pan mae'r holl arwynebeddau eraill yn fwy na  $2\pi r_s^2$ , ac mae hyn yn wir ar gyfer gwerthoedd o'r gymhareb agwedd sydd oddeutu 2.5 a mwy. Mae plotio'r data ar ffurf graff yn hwyluso'r broses o ddarganfod y datrysiad optimaidd ar gyfer holl werthoedd y gymhareb agwedd. Rhoddir arwynebedd y datrysiadau'n llawn yn Ffigur 6 uchod.

Darganfuwyd bod arwynebedd yr arwynebau yn natrysiadau 3(b) a 5(ch) yr un maint pan mae'r gymhareb agwedd  $u/r_s = 2.4594$ , yn gywir i bedwar lle degol. Gwelir o Ffigur

6 mai'r datrysiad lle mae tri phlân fflat yn cwrdd mewn llinell i lawr canol y silindr, Ffigur 5(a), yw'r datrysiad optimaidd ar gyfer  $0 < u/r_s < 1.7619$ . Ar gyfer  $1.7619 < u/r_s < 1.9116$ , y datrysiad sydd â'r arwynebedd lleiaf yw'r un lle mae un plân llorweddol wedi'i leoli hanner ffordd i fyny'r silindr yn cwrdd â dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd seiliau cyferbyn (fel a ddangosir yn Ffigur 5(c)). Pan mae'r gymhareb agwedd yn y cyfwng  $1.9116 < u/r_s < 2.4954$ , y datrysiad a ddangosir yn Ffigur 5(ch), lle mae un plân yn cyffwrdd diamedr y silindr ac yn cwrdd â dau arwyneb crwm sy'n cyffwrdd ochrau'r silindr, yw'r un â'r arwynebedd lleiaf. Yn olaf, y datrysiad a ddangosir yn Ffigur 3(b), lle rhennir y silindr gan ddwy ddisg yw'r un optimaidd ar gyfer gweddill gwerthoedd y gymhareb agwedd, hynny yw  $u/r_s > 2.4954$ .

#### 4. Casgliad

Mae pedwar datrysiad arwynebedd lleiaf yn bodoli ar gyfer y broblem o rannu'r silindr yn dair rhan gyfartal. Mae'r datrysiad optimaidd yn ddibynnol ar werth cymhareb agwedd y silindr, hynny yw'r gymhareb rhwng ei uchder a'i radiws. Mae'r datrysiad cyntaf yn un lle mae tri phlân yn cwrdd mewn llinell i lawr echelin yng nghanol y silindr ac mae'n optimaidd pan mae'r gymhareb agwedd yn llai na 1.7619 (i 4 lle degol). Mae'r ail ddatrysiad posib â dau arwyneb crwm, un o bob sail y silindr, yn cwrdd â phlan llorweddol yng nghanol y silindr. Dyma'r datrysiad optimaidd pan mae'r gymhareb agwedd rhwng 1.7619 ac 1.9116. Yn y trydydd datrysiad, mae dau arwyneb crwm yn cyffwrdd ochrau cyferbyn i'r silindr ac yn cwrdd â phlân fertigol sy'n cyffwrdd sail y silindr yn ei ddiamedr. Y datrysiad hwn yw'r un optimaidd pan mae'r gymhareb agwedd rhwng 1.9116 a 2.4954. Mae'r datrysiad olaf yn defnyddio dwy ddisg llorweddol, wedi'u lleoli ar uchder o draean uchder y silindr,  $u/3$  a dau draean ei uchder,  $2u/3$ , er mwyn ei rannu'n dair rhan. Dyma'r datrysiad optimaidd pan mae'r gymhareb agwedd yn fwy na 2.4954 (i 4 lle degol).

Felly, rydym wedi darganfod y datrysiad optimaidd ar gyfer rhannu silindr yn dair rhan gyfartal ar gyfer pob gwerth o'i gymhareb agwedd. Mae llawer o broblemau diddorol cysylltiedig yn dal heb eu datrys. Er enghraifft, gellid ceisio rhannu'r silindr yn fwy o rannau. Byddai angen ystyried llawer mwy o ddatrysiadau posib yn yr achos hwn ac mae'n debyg y bydd y rhaniadau'n rhai mwy cymhleth. Er mwyn enrhifo'r datrysiadau hynny, byddai'n gwneud synnwyr grwpio'r datrysiadau fel a ganlyn:

- a) datrysiadau sy'n defnyddio arwynebau sydd ddim yn croestorri;
- b) datrysiadau sy'n cynnwys tri arwyneb sy'n cwrdd mewn llinell;
- c) datrysiadau sy'n cynnwys pedair llinell sy'n cwrdd mewn fertig gydag ongl detrahedrol rhwng pob un ohonynt.

Yn ychwanegol at hyn, mae llawer mwy o waith i'w wneud os ydym am enrhifo datrysiadau ar gyfer rhannu'r silindr yn rhannau â chyfeintiau gwahanol. Mae gwaith pellach hefyd i'w wneud er mwyn darganfod rhaniadau arwynebedd lleiaf siapiau gwahanol, er enghraifft ciwb neu brism. Byddem yn argymhell defnyddio'r Surface Evolver er mwyn darganfod datrysiadau'r arwynebedd lleiaf yn yr achosion uchod.

#### Cydnabyddiaeth

Hoffem ddiolch i Ken Brakke am ddatblygu a chefnogi'r Surface Evolver. Hoffai Tudur Davies gydnabod cefnogaeth ariannol y Coleg Cymraeg Cenedlaethol.

## Llyfryddiaeth

- Alfaro, M., Brock, J., Foisy, J., et al. (1990), 'Compound soap bubbles in the plane. SMALL Geometry Group', traethawd PhD, Williams College, Williamstown, MA.
- Alfaro, M., Brock, J., Foisy, J., et al. (1993), 'The standard double soap bubble in  $\mathbb{R}^2$  uniquely minimizes perimeter', *Pacific Journal of Mathematics*, 159, 47–59.
- Almgren, F. a Taylor, J. (1976), 'The geometry of soap films and soap bubbles', *Scientific American*, 82–93.
- Bleicher, M. N. (1987), 'Isoperimetric divisions into several cells with natural boundary', *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 48, 63–84.
- Brakke, K. (1992), 'The Surface Evolver', *Experimental Mathematics*, 1, 141–52.
- Canete, A. a Ritore, M. (2004), 'Least-perimeter partitions of the disk into three regions of given areas', *Indiana University Mathematics Journal*, 53, 883–904.
- Cantat, I., Cohen-Addad, S., Elias, F., et al. (2013), *Foams Structure and Dynamics* (Oxford: Oxford University Press).
- Cox, S. J. (2006), 'Calculations of the minimal perimeter for n deformable cells of equal area confined in a circle', *Philosophical Magazine Letters*, 86, 569–78.
- Cox, S. J. a Flikkema, E. (2010), 'The minimal perimeter for N confined deformable bubbles of equal area', *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17, R45.
- Cox, S. J. a Graner, F. (2003), 'Large two-dimensional clusters of equal-area bubbles', *Philosophical Magazine*, 83, 2573–84.
- Cox, S. J., Graner, F., Vaz, M. F., et al. (2003), 'Minimal perimeter for n identical bubbles in two dimensions: calculations and simulations', *Philosophical Magazine*, 83, 1393–1406.
- Engelstein, M. (2010), 'The least-perimeter partition of a sphere into four equal areas', *Discrete & Computational Geometry*, 44, 645–53.
- Goldberg, M. (1934), 'The isoperimetric problem for polyhedra', *Tohoku Mathematical Journal*, 40, 226–36.
- Hales, T. C. (2002), 'The honeycomb conjecture on the sphere', arXiv:math/0211234.
- Heppes, A. a Morgan, F. (2005), 'Planar clusters and perimeter bounds', *Philosophical Magazine*, 85, 1333–45.
- Morgan, F. (1994), 'Mathematicians, including undergraduates, look at soap bubbles', *The American Mathematical Monthly*, 101, 343–51.
- Morgan, F. (2000), *Geometric Measure Theory* (Williamstown, MA: Academic Press).
- Plateau, J. A. F. (1873), *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Paris: Gauthier-Villars).
- Ros, A. (2005), 'The isoperimetric problem', yn Hoffman, D. (gol.), *Global Theory of Minimal Surfaces, Clay Mathematics Proceedings, Volume 2*, tt.175–209 (Cambridge, MA: American Mathematical Society).
- Taylor, J. E. (1976), 'The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces', *Annals of Mathematics*, 103, 489–539.

- Tomonaga, Y. (1974), 'Geometry of Length and Area', traethawd PhD, Utsonomiya University, Tokyo.
- Thomson, W. (1887), 'On the division of space with minimum partitional area', *Philosophical Magazine*, 24, 503.
- Weaire, D. (1994), *The Kelvin Problem* (London: Taylor & Francis).
- Weaire, D., a Hutzler, S. (2000), *The Physics of Foams* (Oxford: Oxford University Press).
- Weaire, D., a Phelan, R. (1993), 'A counter-example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces', *Philosophical Magazine Letters*, 69, 107–10.
- Wichiramala, W. (2004), 'Proof of the planar triple bubble conjecture', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 567, 1–49.